1) إذا كانت $f(x) = \dfrac{e^x \tan x - 1}{e^x}$

أثبت أن $F(x) = \ln(\sec x) + e^{-x}$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$ حيث $\sec x > 0$

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

1)

$$F'(x) = \frac{\cancel{\sec x} \tan x}{\cancel{\sec x}} - e^{-x} = \tan x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x \tan x - 1}{e^x} = f(x)$$

$\therefore F(x)$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

2) أوجد $\frac{d}{dx}\int_{2-x}^{xe^x} e^{2t}\ dt$ باستخدام النظرية الأساسية للتكامل

.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

(2

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{2-x}^{a} e^{2t}dt + \int_{a}^{xe^x} e^{2t}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_{a}^{2-x} e^{2t}dt + \int_{a}^{xe^x} e^{2t}dt\right)$$

$$= -(-1).e^{2(2-x)} + (xe^x + e^x)\, e^{(2xe^x)} = e^{2(2-x)} + (xe^x + e^x)e^{2xe^x}$$

3) يعطى المرضى المصابون بارتفاع الكوليسترول علاجاً لخفض الدهون الضارة في الجسم .

إذا علمت أن معدل انخفاض مستوى الكوليسترول في الدم بالنسبة لعدد أيام العلاج (t) يعطى بالعلاقة :

$$L'(t) = -0.3t(49 - t^2)^{0.4}$$ (وحدة لكل يوم)

أوجد : مستوى انخفاض الكوليسترول (L) في الدم أول 3 أيام من أخذ العلاج .

.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

3)

$$L(t) = \int_0^3 -0.3t(\,49 - t^2)^{0.4}dt$$

$$= \int_{49}^{40} -0.3t(\,u\,)^{0.4}.\frac{du}{-2t}$$

$$= \frac{0.3}{2}\int_{49}^{40} u^{0.4}du = -0.15\int_{40}^{49} u^{0.4}du = 0.15[\,\frac{1}{1.4}\,][u^{1.4}]_{40}^{49}$$

$$= -0.107[(49)^{1.4} - (40)^{1.4}] \approx -6.15$$

$\therefore$ مستوى انخفاض الكوليسترول في الدم يساوي 6.15 وحدة / يوم

$u = 49 - t^2$

$du = -2tdt$

$t = 0 \rightarrow u = 49$

$t = 3 \rightarrow u = 40$

لتكن f دالة متصلة لكل $x \geq 0$ حيث $f(0) = 5 , f(3) = -1$

إذا علمت أن القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ *على الفترة* $[0, b]$ تساوي $\frac{f(b) + f(0)}{2}$

4) أوجد $\int_0^3 f(x)\, dx$

.....

.....

.....

.....

5) أثبت أن : $f'(x) = \frac{f(x) - 5}{x}$ لكل $x \geq 0$

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

(4

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{f(3) + f(0)}{2} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx$$

$$\frac{-1+5}{2} = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 2 \times 3 = 6$$

(5

$$av(f) = \frac{1}{x-0}\int_0^x f(x)dx$$

$$\frac{f(x)+f(0)}{2} = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx$$

$$\frac{f(x)+5}{2} = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx$$

$$\frac{xf(x)+5x}{2} = \int_0^x f(x)dx$$

باشتقاق الطرفين

$$xf'(x) + f(x) + 5 = 2f(x)$$

$$xf'(x) = f(x) - 5$$

$$f'(x) = \frac{f(x)-5}{x}$$

6) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{x} = cos(5x-1)dx$ حيث $x \neq 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

6)

$$dy = xcos(5x-1)dx$$

$$\int dy = \int xcos(5x-1)dx$$

$$u = x \qquad dv = cos(5x-1)\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{5}sin(5x-1)$$

$$y = \int xcos(5x-1)dx = \frac{x}{5}sin(5x-1) - \int \frac{1}{5}sin(5x-1)\,dx$$

$$= \frac{x}{5}sin(5x-1) + \frac{1}{5}.\frac{1}{5}cos(5x-1) + c = \frac{x}{5}sin(5x-1) + \frac{1}{25}\cos(5x-1) + c$$

7) أوجد قيمة التكامل $\int \frac{x+7}{x^2(x+1)}dx$ (باستخدام التكامل بالكسور الجزئية)

.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

(7

$$\frac{x+7}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x+7 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad B = 7$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad C = 6$$

$$B = 7\,, \qquad C = 6\,, \qquad x = 1 \quad \rightarrow \quad 8 = 2A + (2 \times 7) + 6 \quad \rightarrow \quad A = -6$$

$$\int \frac{x+7}{x^2(x+1)}dx = \int \frac{-6}{x}dx + \int \frac{7}{x^2}dx + \int \frac{6}{x+1}dx$$

$$= -6\,ln|x| + (-7)x^{-1} + 6\,ln|x+1| + C$$

$$= 6\,ln|x+1| - 6\,ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

8) أوجد طول منحنى الدالة $y = f(x)$ على الفترة $[0, 3]$ علما بأن : $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

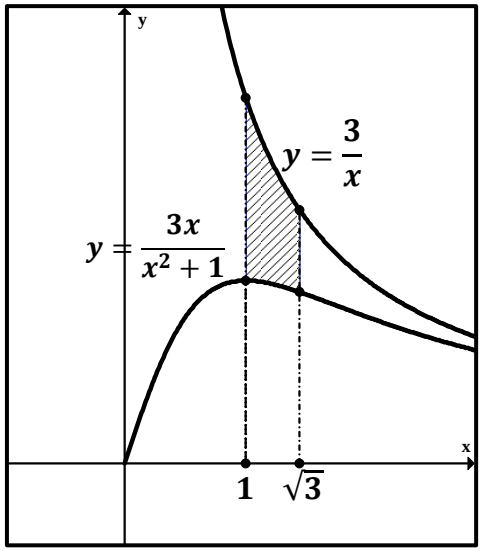
(8

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1-2x+x^2}{4x}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 + 1 = \frac{1-2x+x^2}{4x} + 1 = \frac{1-2x+x^2+4x}{4x} = \frac{x^2+2x+1}{4x} = \frac{(x+1)^2}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 x^{\frac{-1}{2}}(x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{3^3} + 2\sqrt{3}\right) - 0\right] = 2\sqrt{3}$$



9) أوجد مساحة المنطقة المظللة تحليلاً (جبرياً) :

.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

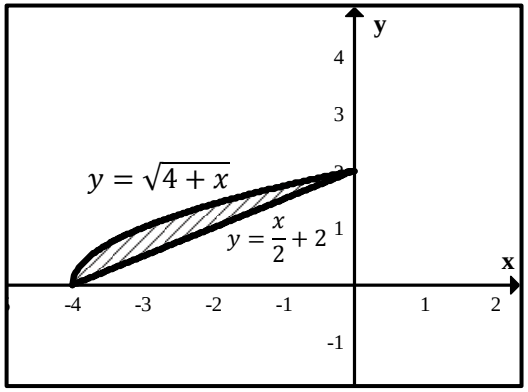
9)

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{x} - \frac{3x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \left[3lnx - \frac{3}{2}ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(3ln\sqrt{3} - \frac{3}{2}ln4\right) - \left(3ln1 - \frac{3}{2}ln2\right) = \frac{3}{2}ln\frac{3}{2}$$

10) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى $y=\sqrt{4+x}$ والمستقيم $y=\frac{x}{2}+2$ حول محور السينات .



.....

.....

.....

.....

.....

الإجابة :

(10

$$V=\int_{-4}^{0}\pi\left(\left(\sqrt{4+x}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\right)dx=\pi\int_{-4}^{0}\left((4+x)-\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)\right)dx$$

$$=\pi\int_{-4}^{0}\left(4+x-\frac{x^2}{4}-2x-4\right)dx=\pi\int_{-4}^{0}\left(\frac{-x^2}{4}-x\right)dx$$

$$=-\pi\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0}=-\pi\left[0-\left(\frac{-64}{12}+\frac{16}{2}\right)\right]=\pi\left(\frac{-16}{3}+8\right)=\frac{8\pi}{3}$$